

問題 1 以下の問いに答えよ.

- (1) $\cos \frac{5}{12}\pi$ の値を求めよ.

(解答) $\cos \frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

- (2) 座標平面上のベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ は, その大きさが $\sqrt{13}$ で, $\vec{b} = (7, 4)$ に垂直であり, かつ $a_1 > 0$ であるという. ベクトル $\vec{a}$ の成分 a_1, a_2 の値を求めよ.

(解答)
$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 13 \\ 7a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_1 > 0 \end{cases}$$
 を解くことで, $a_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}, a_2 = -\frac{7}{\sqrt{5}}$ となる.

- (3) 方程式 $z^6 = 1$ の解のうち, 虚数解の一つを α とする. $t = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ とおくとき, $t^2 - t$ の値を求めよ.

(解答) $t^2 - t = \alpha^4 - \frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^4} + 2$ であり, $\alpha^4 = \frac{1}{\alpha^2}$ と $\alpha^2 = \frac{1}{\alpha^4}$ より, $t^2 - t = 2$ となる.

- (4) 関数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}x + 1}{-x + \sqrt{3}}$ の逆関数を求めよ.

(解答) x について解くと $x = \frac{\sqrt{3}f(x) - 1}{f(x) + \sqrt{3}}$ となる. よって逆関数は $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{3}x - 1}{x + \sqrt{3}}$ となる.

- (5) 関数 $f(x) = (1 - x^2)e^{-x^2}$ の導関数を求めよ.

(解答) $f'(x) = 2x(x^2 - 2)e^{-x^2}.$

問題 2 関数 $f(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を ℓ とする. $0 < t < 1$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ の部分と直線 ℓ および 2 直線 $x = 0, x = 1$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $S(t)$ を求めよ.

(解答) $f'(x) = \frac{-2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}, f''(x) = \frac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$ より, $0 \leq x \leq 1$ において $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ となるため, この区間における接線 ℓ は曲線 $y = f(x)$ の上側にある. 接線の方程式は $y = f'(t)x + \frac{4t^3}{(t^2 + 1)^2}$ であるため, $S(t)$ は

$$S(t) = \int_0^1 \left\{ f'(t)x + \frac{4t^3}{(t^2 + 1)^2} - \frac{2x}{x^2 + 1} \right\} dx = \frac{4t^3 - t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2} - \log 2$$

となる.

- (2) $S(t)$ の最小値を求めよ.

(解答) $S'(t) = \frac{-2t(2t - 1)(t^2 - 3)}{(t^2 + 1)^3}$ より, $S(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{4}{5} - \log 2$ となる.

問題 3 正の定数 a と、 0 以上の整数 m, n に対して、

$$I(m, n) = \int_0^a x^m (a - x)^n dx$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 定積分 $\int_0^2 x^3(2 - x) dx$ を部分積分法で求めよ。

(解答) $\int_0^2 x^3(2 - x) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x^4 dx = \frac{8}{5}.$

- (2) $n \geq 1$ に対して、以下の漸化式が成り立つことを示せ。

$$I(m, n) = \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$$

(解答) $I(m, n) = \int_0^a x^m (a - x)^n dx = \frac{n}{m+1} \int_0^a x^{m+1} (a - x)^{n-1} dx = \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1).$

- (3) 定積分 $\int_0^2 x^4(2 - x)^3 dx$ を求めよ。

(解答) $\int_0^2 x^4(2 - x)^3 dx$ は $a = 2$ のときの $I(4, 3)$ である。(2) より、 $I(4, 3) = \frac{3}{5} I(5, 2) = \frac{1}{5} I(6, 1) = \frac{1}{35} I(7, 0)$ とできる。よって、

$$I(4, 3) = \frac{1}{35} \int_0^2 x^7 dx = \frac{32}{35}$$

となる。

問題 4 1 から 9 までの自然数をいくつか加えて 10 にすることを考える。ただし、同じ数は何度用いてもよいとし、加える数の順番のみが異なるものは同じとみなす。例えば、2 個の数をを用いる場合は $1+9, 2+8, 3+7, 4+6, 5+5$ の 5 通りある。以下の問いに答えよ。

- (1) 3 個の数をを用いる場合は何通りあるか。

(解答) $1+1+8, 1+2+7, 1+3+6, 1+4+5, 2+2+6, 2+3+5, 2+4+4, 3+3+4$ の 8 通りである。

- (2) 8 個以上の数をを用いる場合は何通りあるか。

(解答) 8 個のときは $1+1+1+1+1+1+1+3, 1+1+1+1+1+1+2+2$ の 2 通り、9 個のときは $1+1+1+1+1+1+1+1+2$ の 1 通り、10 個のときは $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ の 1 通りである。よって 4 通りとなる。

- (3) 全部で何通りあるか。

(解答) 残りの 4 個から 7 個を用いた場合を、(1) と (2) で得られた 10 の分割の経験から導くことで以下を得る。

2 個	3 個	4 個	5 個	6 個	7 個	8 個	9 個	10 個
5 通り	8 通り	9 通り	7 通り	5 通り	3 通り	2 通り	1 通り	1 通り

よって、全部で $5+8+9+7+5+3+2+1+1=41$ 通りとなる。